ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

DƯƠNG HUYỀN NHUNG

SỰ HỘI TỤ THEO DUNG LƯỢNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN – 2016

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

DƯƠNG HUYỀN NHUNG

SỰ HỘI TỤ THEO DUNG LƯỢNG

Chuyên ngành: TOÁN GIẢI TÍCH

Mã số: 60.46.01.02

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học: PGS.TS. PHẠM HIẾN BẰNG

THÁI NGUYÊN – 2016

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của riêng tôi. Các tài liệu trong luận văn là trung thực. Luận văn chưa từng được công bố trong bất cứ công trình nào.

Tác giả

Dương Huyền Nhung

LỜI CẢM ƠN

Bản luận văn được hoàn thành tại Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên dưới sự hướng dẫn tận tình của PGS.TS Phạm Hiến Bằng. Nhân dịp này tôi xin cám ơn Thầy về sự hướng dẫn hiệu quả cùng những kinh nghiệm trong quá trình học tập, nghiên cứu và hoàn thành luận văn.

Xin chân thành cảm ơn Phòng Sau Đại học, Ban chủ nhiệm Khoa Toán, các thầy cô giáo Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên, Viện Toán học và Trường Đại học Sư phạm Hà Nội đã giảng dạy và tạo điều kiện thuận lợi cho tôi trong quá trình học tập và nghiên cứu khoa học.

Xin chân thành cảm ơn Trường THPT Chuyên Tỉnh Cao Bằng cùng các đồng nghiệp đã tạo điều kiện giúp đỡ tôi về mọi mặt trong quá trình học tập và hoàn thành bản luận văn này.

Bản luận văn chắc chắn sẽ không tránh khỏi những khiếm khuyết vì vậy rất mong nhận được sự đóng góp ý kiến của các thầy cô giáo và các bạn học viên để luận văn này được hoàn chỉnh hơn.

Cuối cùng xin cảm ơn gia đình và bạn bè đã động viên, khích lệ tôi trong thời gian học tập, nghiên cứu và hoàn thành luận văn.

Tháng 04 năm 2016

Tác giả

MỤC LỤC

MỞ ĐẦU

1. Lý do chọn đề tài

Khái niệm dung lượng đã được Bedford và Taylor giới thiệu năm 1982 trong [3]. Nó đóng vai trò hết sức quan trọng trong lý thuyết đa thế vị, là công cụ rất hiệu quả trong việc nghiên cứu các hàm đa điều hòa dưới và toán tử Monge-Ampère phức. Một trong những hướng nghiên cứu của lý thuyết đa thế vị được nhiều người quan tâm hiện nay là tìm mối quan hệ giữa sự hội tụ theo dung lượng của hàm đa điều hoà dưới và sự hội tụ của các độ đo Monge-Ampère phức tương ứng. Nghiên cứu kiểu hội tụ của độ đo Monge-Ampère phức và sự hội tụ theo dung lượng C_n của các hàm. Mối quan hệ giữa sự hội tụ yếu của các độ đo Monge-Ampère phức với sự hội tụ theo $C_{n-1}-$dung lượng của các hàm. Vì thế theo hướng nghiên cứu này chúng tôi chọn đề tài: "*Sự hội tụ theo dung lượng*".

2. Mục đích và nhiệm vụ nghiên cứu

2.1. Mục đích nghiên cứu

Mục đích chính của luận văn là nghiên cứu về sự hội tụ theo dung lượng của hàm đa điều hoà dưới và sự hội tụ của các độ đo Monge-Ampère phức tương ứng; mối quan hệ giữa sự hội tụ của độ đo Monge-Ampère phức và sự hội tụ theo C_n-dung lượng cũng như $C_{n-1}-$dung lượng của các hàm. Nghiên cứu tính ổn định nghiệm của các phương trình Monge-Ampère.

2.2. Nhiệm vụ nghiên cứu

Luận văn tập trung vào các nhiệm vụ chính sau đây:

+ Nghiên cứu mối quan hệ giữa sự hội tụ theo dung lượng của hàm đa điều hoà dưới và sự hội tụ của các độ đo Monge-Ampère phức tương ứng.

+ Nghiên cứu mối quan hệ giữa sự hội tụ của độ đo Monge-Ampère phức và sự hội tụ theo $C_n -$dung lượng cũng như $C_{n-1} -$dung lượng của các hàm.

+ Nghiên cứu tính ổn định nghiệm của phương trình Monge-Ampère.

3. Phương pháp nghiên cứu

Sử dụng các phương pháp của giải tích phức kết hợp với phương pháp của lý thuyết đa thế vị phức.

4. Bố cục của luận văn

Nội dung luận văn gồm 45 trang, trong đó có phần mở đầu, hai chương nội dung, phần kết luận và danh mục tài liệu tham khảo.

Chương 1: Trình bày tổng quan và hệ thống các kiến thức cơ sở của lý thuyết đa thế vị cần thiết được sử dụng trong chương 2.

Chương 2: Là nội dung chính của luận văn, trình bày lại các kết quả nghiên cứu gần đây của Y. Xing về mối quan hệ giữa sự hội tụ theo dung lượng của hàm đa điều hoà dưới và sự hội tụ của các độ đo Monge-Ampère phức tương ứng, một số dạng khác nhau của định lý về tính ổn định đối với nghiệm của phương trình Monge-Ampère phức. Phần cuối của chương này chúng tôi trình bày lại các kết quả của Xing đối với các lớp kiểu Cegrell $\mathcal{F}(\Omega)$ các hàm đa điều hòa dưới không bị chặn.

Cuối cùng là phần kết luận trình bày tóm tắt kết quả đạt được.

Chương 1

CÁC KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

1.1. Hàm đa điều hoà dưới

Định nghĩa 1.1.1. Cho X là một không gian tôpô, hàm $u : X \to \big[-\infty, +\infty$ được gọi là nửa liên tục trên trên X nếu với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$ tập hợp $x \in X : u(x) < \alpha$ là mở trong X.

Định nghĩa 1.1.2. Cho Ω là một tập con mở của $\mathbb{C}^n$ và $u : \Omega \to \big[-\infty, \infty$ là một hàm nửa liên tục trên và không trùng với $-\infty$ trên bất kỳ thành phần liên thông nào của Ω. Hàm u được gọi là đa điều hoà dưới nếu với mỗi $a \in \Omega$ và $b \in \mathbb{C}^n$, hàm $\lambda \mapsto u(a + \lambda b)$ là điều hoà dưới hoặc trùng $-\infty$ trên mỗi thành phần của tập hợp $\lambda \in \mathbb{C} : a + \lambda b \in \Omega$. Trong trường hợp này, ta viết $u \in PSH(\Omega)$. (ở đây kí hiệu $PSH(\Omega)$ là lớp hàm đa điều hoà dưới trong Ω).

Mệnh đề 1.1.3. *Hàm đa điều hoà dưới thoả mãn nguyên lý cực trị trong miền bị chặn, tức là nếu Ω là một tập con mở liên thông bị chặn của $\mathbb{C}^n$ và $u \in PSH(\Omega)$, thì hoặc u là hằng hoặc với mỗi $z \in \Omega$,*

$$u(z) < \sup_{\omega \in \partial\Omega} \limsup_{\substack{y \to \omega \\ y \in \Omega}} u(y).$$

Định nghĩa 1.1.4. Tập hợp $E \subset \mathbb{C}^n$ được gọi là đa cực nếu với mỗi điểm $a \in E$ đều có một lân cận V của a và một hàm $u \in PSH(V)$ sao cho $E \cap V \subset \; z \in V : u(z) = -\infty$.

Định lý 1.1.5. *Cho Ω là một tập con mở trong $\mathbb{C}^n$. Khi đó*

(i) *Họ $PSH(\Omega)$ là nón lồi, tức là nếu α, β là các số không âm và $u, v \in PSH(\Omega)$, thì $\alpha u + \beta v \in PSH(\Omega)$.*

(ii) *Nếu Ω là liên thông và $\{u_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset PSH(\Omega)$ là dãy giảm, thì $u = \lim\limits_{j\to\infty} u_j \in PSH(\Omega)$ hoặc $u \equiv -\infty$.*

(iii) *Nếu $u : \Omega \to \mathbb{R}$, và nếu $\{u_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset PSH(\Omega)$ hội tụ đều tới u trên các tập con compact của Ω, thì $u \in PSH(\Omega)$.*

(iv) *Giả sử $\{u_\alpha\}_{\alpha\in A} \subset PSH(\Omega)$ sao cho bao trên của nó $u = \sup\limits_{\alpha\in A} u_\alpha$ là bị chặn trên địa phương. Khi đó hàm chính qui nửa liên tục trên u^* là đa điều hoà dưới trong Ω.*

Định lý 1.1.6. *Cho Ω là một tập con mở của $\mathbb{C}^n$.*

(i) *Cho u, v là các hàm đa điều hoà dưới trong Ω và $v > 0$. Nếu $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là lồi, thì $v\phi(u / v)$ là đa điều hoà dưới trong Ω.*

(ii) *Cho $u \in PSH(\Omega)$, $v \in PSH(\Omega)$, và $v > 0$ trong Ω. Nếu $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là lồi và tăng dần, thì $v\phi(u / v)$ là đa điều hoà dưới trong Ω.*

(iii) *Cho $u, -v \in PSH(\Omega)$, $u \geq 0$ trong Ω, và $v > 0$ trong Ω. Nếu $\phi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ là lồi và $\phi(0) = 0$, thì $v\phi(u / v) \in PSH(\Omega)$.*

Định nghĩa 1.1.7. Một miền bị chặn $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ được gọi là miền siêu lồi nếu tồn tại một hàm đa điều hoà dưới âm, liên tục $\rho : \Omega \to (-\infty, 0)$ sao cho với $c < 0$

$$\Omega_c = \{z \in \Omega : \rho(z) < c\} \Subset \Omega.$$

1.2. Toán tử Monge-Ampère phức

Cho u là đa điều hoà dưới trên miền $\Omega \subset \mathbb{C}^n$. Ký hiệu $d = \partial + \overline{\partial}$ và $d^c = i(\overline{\partial} - \partial)$. Nếu $u \in C^2(\Omega)$ thì toán tử:

$$(dd^c u)^n = \underbrace{(dd^c u) \wedge \ldots \wedge (dd^c u)}_{n} = 4^n n! \det\left[\frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \overline{z}_k}\right]_{1 \le j,k \le n} dV,$$

với dV là yếu tố thể tích trong $\mathbb{C}^n$ gọi là toán tử Monge-Ampe. Toán tử này có thể xem như độ đo Radon trên Ω, tức là phiếm hàm tuyến tính liên tục trên không gian các hàm liên tục với giá compact $C_0(\Omega)$ trên Ω

$$C_0(\Omega) \ni \varphi \mapsto \int_\Omega \varphi (dd^c u)^n.$$

Bedford và Taylor đã chứng minh rằng nếu u là đa điều hoà dưới bị chặn địa phương trên Ω thì tồn tại dãy $\{u_m\}_{m>1} \subset PSH(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$ sao cho $u_m \searrow u$ và $\{(dd^c u_m)^n\}$ hội tụ yếu tới độ đo Radon μ trên Ω tức là:

$$\lim_m \int_\Omega \varphi (dd^c u_m)^n = \int_\Omega \varphi d\mu, \forall \varphi \in C_0(\Omega).$$

Hơn nữa μ không phụ thuộc vào việc chọn dãy $\{u_m\}$ như trên, ta ký hiệu:

$(dd^c u)^n = \mu$ và gọi là *toán tử Monge-Ampe* của u.

Sau đây là một vài tính chất cơ bản của toán tử toán tử Monge-Ampe.

Mệnh đề 1.2.1. *Giả sử $\{\mu_j\}$ là dãy các độ đo Radon trên tập mở $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ hội tụ yếu tới độ đo Radon μ. Khi đó*

$i)$ Nếu $G \subset \Omega$ là tập mở thì $\mu(G) \le \liminf_{j\to\infty} \mu_j(G)$.

$ii)$ Nếu $K \subset \Omega$ là tập compact thì $\mu(K) \ge \limsup_{j\to\infty} \mu_j(K)$.

$iii)$ Nếu E compact tương đối trong Ω: $\mu(\partial E) = 0$ thì $\mu(E) = \lim_{j\to\infty} \mu_j(E)$.